Quelques réflexions sur le Théorème de Ménélaüs

Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159, France
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

9 avril 2003

Résumé

Voici plusieurs démonstrations du célèbre Théorème de Ménélaüs, ainsi qu'une généralisation et quelques liens avec les Théorèmes de Thalès, Ceva et Gergonne. Ce travail permet de réviser le Théorème, en particulier dans le cadre de la préparation au CAPES, en détaillant l'emploi d'outils différents pour arriver au même but. On notera, par exemple, l'emploi des propriétés des homothéties dans la preuve de Ménélaüs et de sa généralisation en dimension n, emploi qui pourra être mis en évidence - ou seulement cité - dans une leçon d'oral de CAPES portant sur les homothéties.

1 L'essentiel

Théorème 1 *Si ABC est un triangle non aplati et si M, N, P désignent trois points appartenant respectivement aux droites (AB), (AC), (BC) et distincts des sommets du triangle ABC, alors*

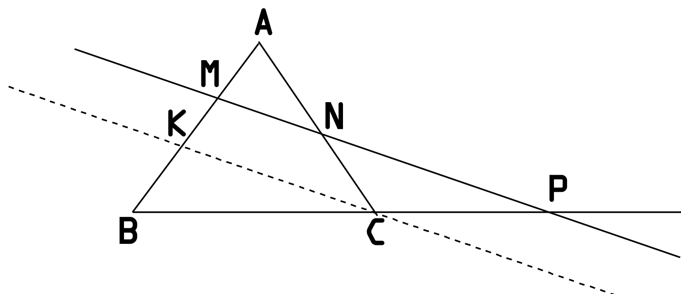
$$M, N, P \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1. \quad (*)$$

Preuve : ($\Rightarrow$) **Première solution : Théorème de Thalès.**
La parallèle à (MP) passant par C coupe (AB) en K. Le théorème de Thalès entraîne $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MK}}$ et $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{MA}}$ et il suffit maintenant de remplacer dans le premier membre de $(*)$.

Deuxième solution : Homothéties.
Soit h_M l'homothétie de centre M transformant B en A, h_N l'homothétie de centre N transformant A en C, et h_P l'homothétie de centre P transformant C en B.
L'homothétie-translation $f = h_P \circ h_N \circ h_M$ laisse le point B invariant. Si f était une homothétie, son centre serait B et l'on obtient une absurdité puisque le centre de l'homothétie composée

[0] [ceaa0013] v1.01 http://perso.wanadoo.fr/megamaths

d'homothéties de centres M, N, P alignés appartient nécessairement à la droite (MNP). Donc f est une translation laissant B invariant. C'est l'identité. Le rapport de f, qui n'est autre que le produit $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, sera donc égal à 1.



($\Leftarrow$) **Première solution : Utilisation de l'aller.**
Si M, N, P vérifient $(*)$, notons P' l'intersection des droites (MN) et (BC). Le point P' existe sinon les droites (MN) et (BC) seraient parallèles et le Théorème de Thalès donnerait $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$. Allié à $(*)$ cela entrainerait $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = 1$ soit $B = C$, absurde. Le sens direct du théorème permet d'écrire

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1.$$

Compte tenu de $(*)$, cela entraîne $\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ d'où $P = P'$.

Deuxième solution : Homothéties.
Avec les notations de l'aller, f est maintenant une homothétie-translation de rapport 1, c'est-à-dire une translation. Comme $f(B) = B$ on aura $f = Id$ et donc $h_N \circ h_M = h_P^{-1}$. Cette égalité entraîne l'alignement des centres N, M, P de ces homothéties. ■

2 Généralisation en dimension n

Théorème 2 *On considère un repère affine $(A_0, ..., A_n)$ d'un espace affine E de dimension n sur $\mathbb{R}$. Si m est un entier congru à p modulo $n+1$, et si $p \in \{0, 1, ..., n\}$, on pose commodément $A_m = A_p$. Pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$ on choisit un point M_i appartenant à $(A_i A_{i+1}) \setminus \{A_i, A_{i+1}\}$. Démontrer que les points M_0, ..., M_n appartiennent à un même hyperplan si et seulement si*

$$\frac{\overline{M_0A_0}}{\overline{M_0A_1}} \times \frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}} \times ... \times \frac{\overline{M_nA_n}}{\overline{M_nA_0}} = 1. \quad (*)$$

Preuve : ▶ **Première preuve : Emploi des homothéties.**
($\Rightarrow$) Supposons que les points M_i appartiennent à un même hyperplan affine H.
Soit h_i l'homothétie de centre M_i transformant A_{i+1} en A_i. Son rapport est $\frac{\overline{M_iA_i}}{\overline{M_iA_{i+1}}}$ et l'on a $h_i(A_{i+1}) = A_i$ pour tout i. Ainsi $h_0 \circ ... \circ h_n(A_0) = A_0$. L'application $f_0 = h_0 \circ ... \circ h_n$ est une homothétie-translation (i.e. une dilatation) qui laisse fixe le point A_0. Si f_0 était une

homothétie, son centre serait A_0 et A_0 appartiendrait au sous-espace affine engendré par les points M_i, et donc $A_0 \in H$.
On peut très bien recommencer la construction ci-dessus pour obtenir les dilatations $f_0, f_1, ..., f_n$ admettant respectivement pour points invariants les points A_0, A_1, ..., A_n. Si toutes les applications $f_0, f_1, ..., f_n$ étaient des homothéties, tous les points A_0, A_1, ..., A_n appartiendraient à H, ce qui est absurde puisque $(A_0, ..., A_n)$ est un repère affine. Donc l'une de ces applications est l'identité. Par exemple $f_0 = Id$, et il suffit d'égaler le rapport de $f_0 = h_0 \circ ... \circ h_n$ (égal au produit des rapports des h_i) à 1 pour obtenir $(*)$.

$(\Leftarrow)$ Si $(*)$ a lieu, l'application $f_0 = h_0 \circ ... \circ h_n$ est une dilatation de rapport 1, donc une translation. Comme $f_0(A_0) = A_0$, c'est l'identité et l'on aura $h_0^{-1} = h_1 \circ ... \circ h_n$. Cette égalité montre que le centre M_0 de h_0^{-1} appartient au sous-espace affine engendré par les centres M_1, ..., M_n des homothéties h_1, ..., h_n. Comme il existe au moins un hyperplan affine H contenant les points M_1, ..., M_n, on peut affirmer que H contiendra tous les points M_0, ..., M_n.

▶ **Seconde preuve : Emploi des barycentres et des déterminants.**
Par hypothèse, il existe un réel α_i distinct de 0 et de 1 tel que M_i soit barycentre de $A_i(\alpha_i)$, $A_{i+1}(1-\alpha_i)$. Alors $\alpha_i \overrightarrow{M_iA_i} + (1-\alpha_i)\overrightarrow{M_iA_{i+1}} = \overrightarrow{0}$, ou encore $\frac{\overline{M_iA_i}}{\overline{M_iA_{i+1}}} = \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i}$. L'égalité $(*)$ s'écrit donc $\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0} \times ... \times \frac{\alpha_n-1}{\alpha_n} = 1$. Admettons ici le résultat de géométrie affine suivant : $n+1$ point M_i d'un espace affine de dimension n sont affinement liés (autrement dit appartiennent à un même hyperplan affine) si et seulement si le déterminant des coordonnées barycentriques de ces points dans un repère affine est nul. Ici et en choisissant le repèe affine $(A_0, ..., A_n)$, cela signifie que les points M_0, ..., M_n appartiennent à un même hyperplan si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & & & & 1-\alpha_n \\ 1-\alpha_0 & \alpha_1 & & & \\ & 1-\alpha_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} & \\ & & & 1-\alpha_{n-1} & \alpha_n \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière affirmation s'écrit, en développant le déterminant suivant la première ligne,

$$\alpha_0\alpha_1...\alpha_n + (-1)^{n+2}(1-\alpha_n) \begin{vmatrix} 1-\alpha_0 & \alpha_1 & & \\ & 1-\alpha_1 & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & & 1-\alpha_{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

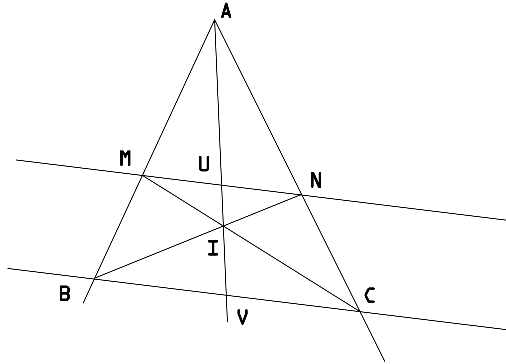
ou encore $\alpha_0\alpha_1...\alpha_n - (\alpha_0 - 1)...(\alpha_{n-1}-1)(\alpha_n - 1) = 0$, et l'on retrouve $\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0} \times ... \times \frac{\alpha_n-1}{\alpha_n} = 1$.
■

3 Théorèmes de Ménélaüs et théorème de Thalès

On a vu, à la Section 1, que le Théorème de Thalès entraînait celui de Ménélaüs. En fait Thalès apparaît comme un cas limite du Théorème de Ménélaüs. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la figure du Théorème 1 et de faire tendre le point P vers l'infini en restant sur la droite (BC) et en le faisant glisser dans le sens B vers C. A la limite, (MN) est parallèle à

(BC) et P est un point "à l'infini". Le rapport $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ tend vers 1, et l'égalité $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ devient la relation de Thalès $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$. De ce point de vue, le Théorème de Ménélaüs et le Théorème de Thalès se déduisent l'un de l'autre.

Pour éviter d'employer un "passage à la limite" qu'il faudrait justifier de façon plus précise, donnons une preuve du Théorème de Thalès qui utilise seulement le Théorème 1. Il s'agit de montrer l'égalité $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$ dès que $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et (MN) parallèle à (BC).



Avec les notations de la figure ci-dessus, on applique le Théorème de Ménélaus 6 fois :

Triangle ABN et sécante MIC : $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{IB}}{\overline{IN}} \times \frac{\overline{CN}}{\overline{CA}} = 1$ (1)

Triangle AMC et sécante NIB : $\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{IC}}{\overline{IM}} \times \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} = 1$ (2)

Triangle MNC et sécante AUI : $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{IC}}{\overline{IM}} \times \frac{\overline{UM}}{\overline{UN}} = 1$ (3)

Triangle MNB et sécante AUI : $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{IB}}{\overline{IN}} \times \frac{\overline{UN}}{\overline{UM}} = 1$ (4)

Triangle BCM et sécante AVI : $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{IM}}{\overline{IC}} \times \frac{\overline{VC}}{\overline{VB}} = 1$ (5)

Triangle BCN et sécante AVI : $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{VC}}{\overline{VB}} \times \frac{\overline{IB}}{\overline{IN}} = 1$ (6)

Alors

$$(1),(4),(6) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{IB}}{\overline{IN}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \times \frac{\overline{UM}}{\overline{UN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} \times \frac{\overline{VB}}{\overline{VC}}$$

$$(2),(3),(5) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{IC}}{\overline{IM}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} \times \frac{\overline{UN}}{\overline{UM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{VC}}{\overline{VB}}$$

Ces 6 égalités entraînent

$$\left(\frac{\overline{IB}}{\overline{IN}}\right)^3 \left(\frac{\overline{IC}}{\overline{IM}}\right)^3 = \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}.\frac{\overline{CA}}{\overline{CN}}.\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}.\frac{\overline{UM}}{\overline{UN}}.\frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} \times \frac{\overline{VB}}{\overline{VC}}.\frac{\overline{IC}}{\overline{IM}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{BA}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{AC}}{\overline{AN}}.\frac{\overline{UN}}{\overline{UM}}.\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.\frac{\overline{VC}}{\overline{VB}}$$

d'où, après simplification

$$\left(\frac{\overline{IB}}{\overline{IN}}\right)^3 \left(\frac{\overline{IC}}{\overline{IM}}\right)^3 = \frac{\overline{AC}^3.\overline{AB}}{\overline{AN}^3.\overline{AM}}$$

puis

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}^3}{\overline{AN}^3}.\frac{\overline{IN}^3.\overline{IM}^3}{\overline{IB}^3.\overline{IC}^3}. \qquad (I)$$

Par un raisonnement symétrique, nous obtenons aussi la formule

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{AM}^3}.\frac{\overline{IN}^3.\overline{IM}^3}{\overline{IB}^3.\overline{IC}^3}. \qquad (II)$$

Finalement

$$(I) \text{ et } (II) \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.\frac{\overline{AN}^3}{\overline{AC}^3} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}.\frac{\overline{AM}^3}{\overline{AB}^3} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}.$$

L'étude des signes des rapports $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ et $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ permet de conclure à l'égalité $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$.

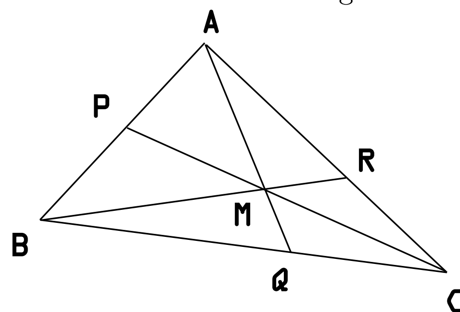
4 Preuve utilisant des équations de droites

Le plan affine est rapporté à un repère cartésien. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$ on considère une droite D_i d'équation $a_i x + b_i y + c_i = 0$, et l'on rappelle que trois droites sont dites concourantes si elles contiennent un même point. On sait alors (exercice !) que les trois droites D_i sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette CNS pour que trois droites soient concourantes ou parallèles nous offre une démonstration du Théorème de Ménélaüs. Considérons un triangle ABC et des points P, Q, R situés respectivement sur les droites (AB), (BC), (CA) et distincts des sommets du triangle.

Rapportons le plan au repère cartésien $\left(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ et notons $(0,p)$, $(q,0)$ et $(r, 1-r)$ les coordonnées respectives des points P, Q, R dans ce repère.



Les équations des droites (AQ), (CP) et (BR) sont :

$$(AQ) \quad : \quad \begin{vmatrix} x & q \\ y-1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ soit } -x - q\,(y-1) = 0,$$

$$(CP) \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & p \end{vmatrix} = 0, \text{ soit } p\,(x-1) + y = 0,$$

$$(BR) \quad : \quad \begin{vmatrix} x & r \\ y & 1-r \end{vmatrix} = 0, \text{ soit } (1-r)\,x - ry = 0,$$

et les trois droites (CP), (AQ), (BR) seront concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} -1 & -q & q \\ p & 1 & -p \\ 1-r & -r & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière condition équivaut à $pr + qp + rq = 2pqr + q$ $(*)$. Par ailleurs,

$$\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1-p \end{pmatrix};\ \overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} 0 \\ -p \end{pmatrix};\ \overrightarrow{QB}\begin{pmatrix} -q \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{QC}\begin{pmatrix} 1-q \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{RC}\begin{pmatrix} 1-r \\ r-1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{RA}\begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix},$$

et un simple calcul donne

$$\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1\right) \Leftrightarrow \frac{1-p}{-p} \times \frac{-q}{1-q} \times \frac{r-1}{r} = -1 \Leftrightarrow (*)\,.$$

5 Théorème de Ceva & Théorème de Gergonne

On considère un triangle ABC et des points P, Q, R situés respectivement sur les droites (AB), (BC), (CA) et distincts des sommets du triangle.

Théorème 3 - *Ceva* -
Les droites $(CP), (AQ), (BR)$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1. \quad (1)$$

Preuve : $(\Rightarrow)$ • Supposons d'abord que les trois droites concourent en un point M.

Première solution : Notons (α, β, γ) les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A, B, C). On peut toujours supposer que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Aucun des coefficients α, β, γ n'est nul (sinon M appartiendrait à l'un des côtés et l'un des points P, Q, R serait confondu avec l'un des sommets du triangle) et la somme de deux coefficients choisis parmi α, β, γ n'est jamais nulle (sinon l'on aurait par exemple $\alpha + \beta = 0$, soit $\overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} = \alpha\overrightarrow{BA}$ et (CM) serait parallèle à (BA)). L'associativité du barycentre montre que M est barycentre de $A(\alpha), g(\beta+\gamma)$ où g est barycentre de $B(\beta), C(\gamma)$. Comme les points g, B, C d'une part, et g, A, M d'autre part, sont alignés, on déduit $g = Q$, et $\beta\overrightarrow{QB} + \gamma\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{0}$, d'où $\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = -\frac{\gamma}{\beta}$. De la même façon, $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -\frac{\alpha}{\gamma}$, et l'égalité (1) est démontrée.

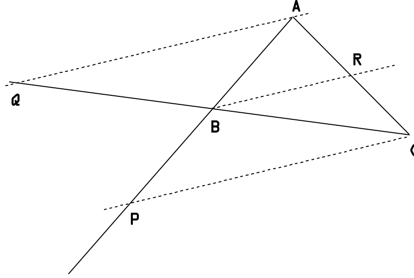
Deuxième solution : Le Théorème de Ménélaüs appliqué dans les triangles ABQ et AQC avec les sécantes (CP) et (BR) donne

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{CQ}} \times \frac{\overline{MQ}}{\overline{MA}} = 1 \text{ et } \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} \times \frac{\overline{MA}}{\overline{MQ}} \times \frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}} = 1.$$

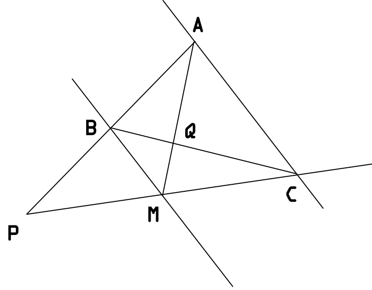
Il suffit de faire le produit membre à membre de ces deux égalités pour obtenir (1).

• Supposons maintenant que les trois droites soient parallèles. Dans cas cas, le Théorème de Thalès permet d'écrire

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CR}} \times \frac{\overline{AR}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1.$$



($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que l'égalité (1) soit vérifiée. Si les droites (CP), (AQ), (BR) sont parallèles, il n'y a rien à démontrer. Sinon, deux droites parmi $(CP),(AQ),(BR)$ sont concourantes. Supposons par exemple que (CP) et (AQ) se coupent en M. Alors (BM) coupe (AC) en R'. Dans le cas contraire, (BM) serait parallèle à (AC) et l'on aurait le dessin suivant :



Le Théorème de Thalès entraînerait alors $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BM}} = -\frac{\overline{QC}}{\overline{QB}}$, et en remplaçant dans (1), on obtiendrait $\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$ donc $C = A$, ce qui est absurde.
Le sens direct du Théorème de Ceva montre que

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{R'C}}{\overline{R'A}} = -1.$$

En égalant avec (1), on trouve $\frac{\overline{R'C}}{\overline{R'A}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}}$ d'où $R = R'$, et cela prouve que les trois droites $(CP),(AQ),(BR)$ sont concourantes. ■

Théorème 4 - *Gergonne* -
Si les trois droites $(CP),(AQ),(BR)$ sont concourantes en M, alors

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{CP}} + \frac{\overline{MQ}}{\overline{AQ}} + \frac{\overline{MR}}{\overline{BR}} = 1. \quad (2)$$

Preuve : Conservons les notations barycentriques du Théorème précédent. Le point M est barycentre de $A(\alpha)$ et $Q(\beta+\gamma)$, donc $\overrightarrow{QM} = \alpha\overrightarrow{QA}$ et l'on aura $\frac{\overline{MQ}}{\overline{AQ}} = \alpha$. De la même manière, $\frac{\overline{MP}}{\overline{CP}} = \gamma$ et $\frac{\overline{MR}}{\overline{BR}} = \beta$, et (2) s'obtient en remplaçant ces valeurs dans l'égalité $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

Autre démonstration : La démonstration précédente est courte et agréable, mais il n'est pas inutile de savoir qu'il est possible de démontrer le Théorème de Gergonne en utilisant

seulement le Théorème de Ménélaüs. En utilisant Ménélaüs dans le triangle MRC avec la sécante (PAB), puis dans le triangle AMR avec la sécante (BQC), on trouve

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{AR}} \times \frac{\overline{BR}}{\overline{BM}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{QM}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CR}} \times \frac{\overline{BR}}{\overline{BM}} = 1,$$

d'où

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BM}}{\overline{BR}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{QM}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{CA}} \times \frac{\overline{BM}}{\overline{BR}}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{MP}}{\overline{CP}} + \frac{\overline{MQ}}{\overline{AQ}} + \frac{\overline{MR}}{\overline{BR}} &= \left(\frac{\overline{AR}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BM}}{\overline{BR}}\right) + \left(\frac{\overline{CR}}{\overline{CA}} \times \frac{\overline{BM}}{\overline{BR}}\right) + \frac{\overline{MR}}{\overline{BR}} \\
&= \frac{\overline{BM}}{\overline{BR}} \times \left(\frac{\overline{AR}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{CR}}{\overline{CA}}\right) + \frac{\overline{MR}}{\overline{BR}} \\
&= \frac{\overline{BM}}{\overline{BR}} + \frac{\overline{MR}}{\overline{BR}} \\
&= 1. \blacksquare
\end{aligned}$$

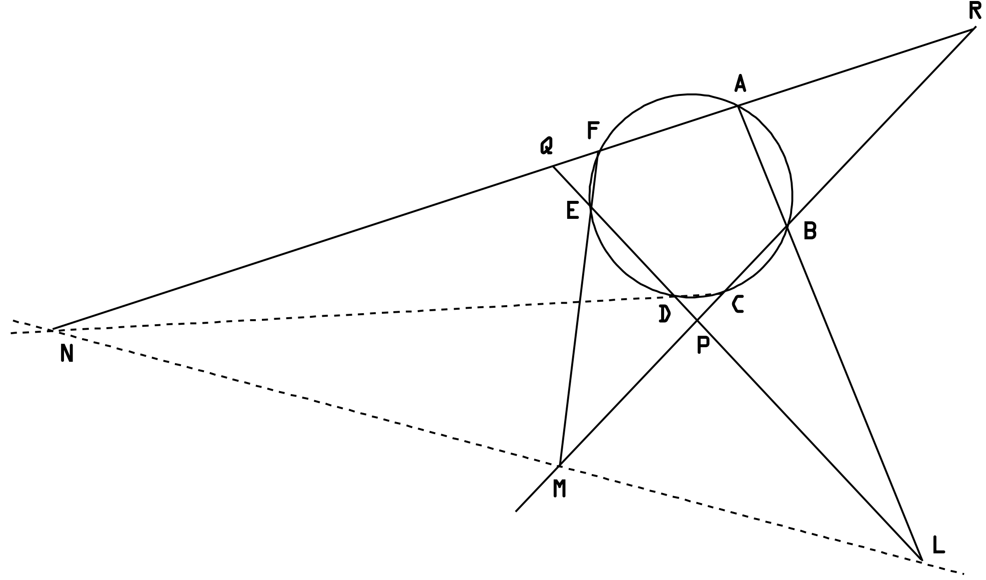
6 Hexagramme mystique de Pascal pour le cercle

Nous terminerons cette petite excursion dans le pays de Ménélaüs en donnant la démonstration du Théorème de l'hexagramme mystique de Pascal pour le cercle en exercice. Les questions suivantes ont été posées (en des termes proches) dans la Partie III de la 2ème composition du CAPES interne 2000. L'énoncé du CAPES proposait ensuite d'obtenir le Théorème de Brianchon par dualité pôles-polaires à partir du Théorème de Pascal.

Exercice : 1) On considère un hexagone $ABCDEF$ inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ et tel que les côtés opposés (AB) et (ED), (BC) et (EF), (CD) et (FA) se coupent respectivement en L, M et N. Démontrer que les points L, M et N sont alignés en utilisant le Théorème de Ménélaüs.

2) Quelles propriétés concernant un triangle ABC inscrit dans un cercle peut-on déduire du Théorème de Pascal ? On pourra considérer un triangle comme un hexagone dont les sommets ont tendu l'un vers l'autre en restant sur le cercle circonscrit.

Solution proposée : 1)



Le Théorème de Ménélaus dans le triangle PQR permet d'écrire :

$$\begin{array}{rcl} \text{avec la sécante } LAB & : & \dfrac{\overline{LP}}{\overline{LQ}} \times \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \times \dfrac{\overline{BR}}{\overline{BP}} = 1, \\ \text{avec la sécante } NDC & : & \dfrac{\overline{NQ}}{\overline{NR}} \times \dfrac{\overline{CR}}{\overline{CP}} \times \dfrac{\overline{DP}}{\overline{DQ}} = 1, \\ \text{avec la sécante } MEF & : & \dfrac{\overline{MR}}{\overline{MP}} \times \dfrac{\overline{EP}}{\overline{EQ}} \times \dfrac{\overline{FQ}}{\overline{FR}} = 1. \end{array}$$

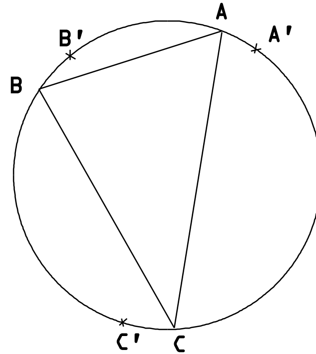
Si l'on multiplie ces trois égalités membre à membre et si l'on tient compte des égalités

$$\overline{PE} \times \overline{PD} = \overline{PB} \times \overline{PC} \; ; \quad \overline{QA} \times \overline{QF} = \overline{QE} \times \overline{QD} \; ; \quad \overline{RB} \times \overline{RC} = \overline{RA} \times \overline{RF}$$

obtenues en écrivant de deux façons différentes les puissances des points P, Q, R par rapport au cercle, on obtient $\frac{\overline{LP}}{\overline{LQ}} \times \frac{\overline{NQ}}{\overline{NR}} \times \frac{\overline{MR}}{\overline{MP}} = 1$, et cela prouve l'alignement des points L, M et N.

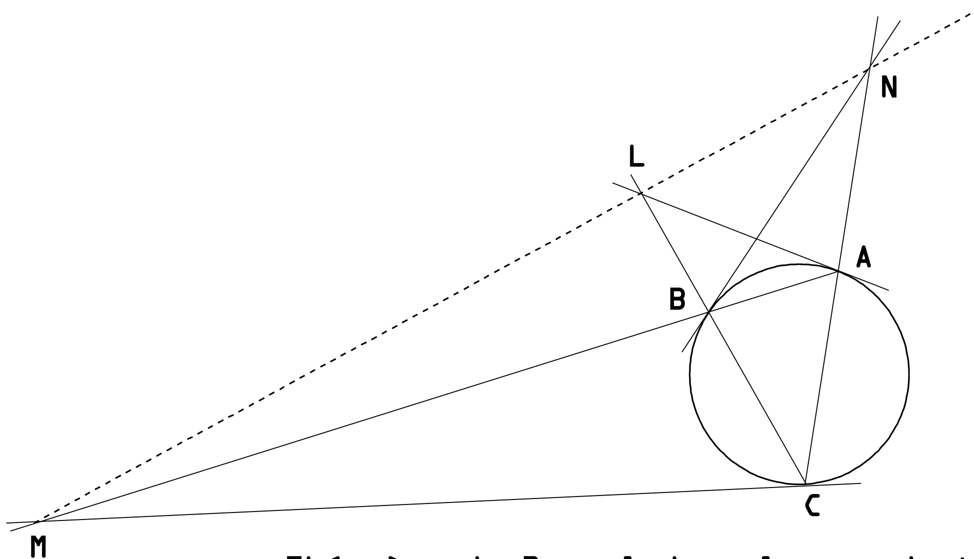
2) • Théorème de Pascal pour le triangle : En notant A', B', C' les points qui tendent vers A, B, C en restant sur le cercle circonscrit, on imagine très bien l'hexagone et le Théorème de Pascal s'énonce :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A'A) \text{ coupe } (BC) \text{ en } L \\ (AB') \text{ coupe } (CC') \text{ en } M \\ (B'B) \text{ coupe } (C'A') \text{ en } N \end{array} \right. \Rightarrow L,\, M,\, N \text{ alignés.}$$



En passant à la limite, la droites $(A'A)$ tend vers la tangente T_A au cercle en A, et ainsi de suite, d'où le résultat :

$$\left\{\begin{array}{l} T_A \text{ coupe } (BC) \text{ en } L \\ (AB) \text{ coupe } T_C \text{ en } M \\ T_B \text{ coupe } (CA) \text{ en } N \end{array}\right. \Rightarrow L,\ M,\ N \text{ alignés.}$$



Théorème de Pascal dans le cas du triangle

[0]Le fichier ceaa0013 v1.00 avait été publié la première fois sur bibelec (www.bibelec.com) en janvier 2002 sous le nom peaa0013 v1.00, puis j'ai refusé qu'il continue à être refusé par la bibelec à partir du moment où ceux-ci sont devenus payants. Mes références internes à cette version v1.01 sont : Section 1: ~ueaa0008 v1.00, Section 2: ~ueaa0010 v1.03, Section 3: ~ueaa0001 v1.02, Section 4: ~ueaa0014 v1.01, Section 5: ~ueaa0003 v1.02, Section 6: ~ucer0007 v1.10.